Klassischer Limes für H-kovariante Darstellungstheorie

Patricia Calon

Diese Arbeit ist in der mathematischen Physik anzusiedeln, genauer im Gebiet der Deformationsquantisierung.

Die Deformationsquantisierung stellt eine Quantisierungsmethode dar. Betrachtet man die klassische Mechanik in der Hamiltonschen Formulierung und die Quantenmechanik in der Hilbert–Raum–Formulierung, so nimmt die Deformationsquantisierung ihren Ausgangspunkt in der strukturellen Ähnlichkeit dieser beiden Theorien, insbesondere in der Ähnlichkeit der mathematischen Formulierung der Observablen. Die klassischen Observablen eines physikalischen Systems beschreibt man mit Hilfe der Poisson–*–Algebra $C^\infty(M)$ der glatten komplexwertigen Funktionen auf einer Poisson-Mannigfaltigkeit $(M, \{\cdot,\cdot\})$ mit der komplexen Konjugation als *–Involution. Grob gesagt, konstruiert man nun eine quantenmechanische Observablenalgebra, indem man das kommutative, punktweise Produkt auf $C^\infty(M)$ zu einem nichtkommutativen Produkt auf den formalen Potenzreihen $C^\infty(M)[[\lambda]]$ deformiert. Dies führt auf die sogenannte Sternproduktalgebra. Zustände erhält man dann durch normierte, positive lineare Funktionale. Ein Problem des dadurch gegebenen Zustandsbegriffs besteht allerdings darin, dass diese Formulierung allein noch kein Superpositionsprinzip zulässt, welches jedoch für eine vollständige Quantenmechanik unerlässlich ist. Deshalb braucht man schließlich noch eine Darstellung, besser gesagt eine *–Darstellung, der Observablenalgebra auf einem (Prä–)Hilbert–Raum, so dass sich die positiven linearen Funktionale als Erwartungswerte von Vektorzuständen schreiben lassen. Nun gibt es aber im Allgemeinen viele mögliche Darstellungen einer Sternproduktalgebra auf Prä–Hilbert–Räumen über $\mathbb{C}$, jedoch keine allgemeinen Kriterien, mit denen sich stets die richtigen bestimmen lassen. Vielmehr muss man versuchen in der konkreten Situation weitere Anhaltspunkte zu finden. Zudem genügt auch nicht immer eine Darstellung alleine, was im Zusammenhang mit Superauswahlregeln steht. Daher ist es zunächst von Interesse, alle Darstellungen einer gegebenen Sternproduktalgebra auf Prä–Hilbert–Räumen zu betrachten. Leider ist es typischerweise jedoch sehr schwierig bis unmöglich eine relativ explizite Charakterisierung der Darstellungstheorie einer Observablenalgebra anzugeben. Darstellungstheorien verschiedener Algebren zu vergleichen ist hier wesentlich einfacher. Eine Klassifikation von Algebren, die äquivalente Darstellungstheorien besitzen, ist mit Hilfe der Morita–Theorie möglich.

Neben der Frage, wie man von einer klassischen zu einer quantentheoretischen Beschreibung eines physikalischen Systems gelangt, ist auch die Frage nach der anderen Richtung, dem klassischen Limes von besonderem Interesse. Dabei möchte man verstehen, wie die klassische Physik als Grenzfall für den entsprechenden Wirklichkeitsbereich in der Quantenphysik enthalten ist. Eine Besonderheit der Deformationsquantisierung, die sie gegenüber anderen Quantisierungsmethoden auszeichnet, ist die Tatsache, dass sie den klassischen Limes durch ihre Konstruktion gleich mitliefert.

In dieser Arbeit wird nun der klassische Limes von Darstellungstheorien quantenmechanischer Observablenalgebren von einem höheren Standpunkt aus beschrieben. Dies erlaubt es, schon bekannte Resultate in einen übersichtlicheren Rahmen einzubetten und diese auf diesem Hintergrund einfacher zu zeigen. Außerdem werden dabei durch Hopf–Algebra–Wirkungen beschriebene Symmetrien mit einbezogen. Dazu betrachtet man als Verallgemeinerung der Funktionenalgebra der klassischen Observablen zunächst beliebige *–Algebren mit Eins über der komplexen Ringerweiterung C eines geordneten Rings und als Verallgemeinerung von Sternproduktalgebren vollständig positive Deformationen von solchen *–Algebren. Anstelle von Prä–Hilbert–Räumen über $\mathbb{C}$ wählt man außerdem das verallgemeinerte Konzept der Prä–Hilbert–Moduln über *–Algebren. Schließlich verwendet man die Sichtweise, dass man *–Darstellungen von *–Algebren in Prä–Hilbert–Moduln auch als Bimoduln auffassen kann, welche dann den Namen Prä–Hilbert–Bimoduln tragen. Prä–Hilbert–Bimoduln wiederum lassen sich mit dem Konzept einer *–Bikategorie beschreiben. Diese wird nun in der Arbeit auf den H–kovarianten Fall erweitert und die *–Bikategorie $\underline{\mathsf{Bimod}}_H^{\mathrm{str}}$ der H–kovarianten Prä–Hilbert–Bimoduln definiert. Bestandteil dieser *–Bikategorie sind unter anderem als Objekte die Klasse aller *–Algebren über C mit Eins, die eine *–Wirkung einer Hopf–*–Algebra H über C tragen, sowie für je zwei solcher *–Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ die Kategorie der H–kovarianten $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$–Prä–Hilbert–Bimoduln. Auf ähnliche Weise wird die *–Bikategorie $\underline{\boldsymbol{\mathsf{Bimod}}}_{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{\mathsf{str}}}$ für *–Darstellungen von den Quantenobservablenalgebren definiert.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist nun die Konstruktion einer klassischen Limes Abbildung $\underline{\mathrm{kl}}\colon \underline{\boldsymbol{\mathsf{Bimod}}}_{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{\mathsf{str}}} \longrightarrow \underline{\mathsf{Bimod}}_H^{\mathrm{str}}$ und der Satz, dass diese ein *–Bikategorienhomomorphismus ist. Aus relativ einfachen abstrakten Folgerungen liefert der *–Bikategorienhomomorphismus $\underline{\mathrm{kl}}$ nun auch einen klassischen Limes Funktor $\mathrm{kl}\colon \boldsymbol{\mathsf{Pic}}_{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{str}} \longrightarrow \mathsf{Pic}_H^{\mathrm{str}}$ zwischen den starken Picard–Gruppoiden. Daraus erhält man wiederum einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{kl}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\colon \boldsymbol{\mathsf{Pic}}_{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{str}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathsf{Pic}_H^{\mathrm{str}}(\mathcal{A})$ auf Ebene der starken Picard–Gruppen. Mit diesem Ergebnis folgt zum Beispiel unmittelbar, dass die klassischen Limites zweier $\boldsymbol{H}$–kovariant stark Morita–äquivalenter Sternproduktalgebren selbst wieder H–kovariant stark Morita–äquivalent sind.